1- V nin bir ortonormal bazı $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ olmak üzere

($\Rightarrow$) $\phi : V \to V$ bir izometri olsun. O zaman,

$$\langle \phi(\alpha_i), \phi(\alpha_j) \rangle \underset{\phi,\ \text{izom.}}{=} \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \underset{\underbrace{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}}_{\text{BAZ}} \subset V}{=} \delta_{ij}$$

yazılır. Bunun anlamı, $\{\phi(\alpha_1), \phi(\alpha_2), \dots, \phi(\alpha_n)\}$, V nin bir bazıdır.

($\Leftarrow$) $\{\phi(\alpha_1), \phi(\alpha_2), \dots, \phi(\alpha_n)\}$, V nin bir bazı olsun.

$\forall x, y \in V$ için,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i \qquad \Rightarrow \phi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \phi(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$$

$$\phi(y) = \sum_{j=1}^{n} y_j \phi(\alpha_j) = \sum_{j=1}^{n} y_j \alpha_j$$

$y = \sum_{j=1}^{n} y_j \alpha_j$ olacak şekilde tek türlü yazılır. Buradan,

$$\langle x, y \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \alpha_j \rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \delta_{ij} \Rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j .$$

$$\langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i \phi(\alpha_i), \sum_{j=1}^{n} y_j \phi(\alpha_j) \rangle$$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Sonuç olarak,

$\langle x, y \rangle = \langle \phi(x), \phi(y) \rangle$ elde edilir. Bu ise ϕ dönüşümünün izometri olmasıdır.

2- $A: V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun.

($\Rightarrow$) A birebir olsun. $A(\alpha)=0$ olmak üzere $A(0)=0$ olduğundan

$$A(\alpha) = A(0)$$ yazılır. Hipoteze göre,

$$\Rightarrow \alpha = 0$$ bulunur.

($\Leftarrow$) $A(\alpha)=0$ iken $\alpha=0$ olsun. Her $\alpha, \beta \in V$ için

$$A(\alpha) = A(\beta)$$ olsun. Buradan,

$$\Rightarrow A(\alpha) - A(\beta) = 0$$

$\downarrow$ A lineer

$$\Rightarrow A(\alpha - \beta) = 0$$

$\downarrow$ Hipoteze göre

$$\Rightarrow \alpha - \beta = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta$$ olup A birebirdir.

3-
$$x + 2y - z = -1$$
$$3x + 8y + 2z = 28$$
$$4x + 9y - z = 14$$ lineer denklem sisteminin katsayılar matrisi A olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & -1 \end{bmatrix}$$ dır ve ilaveli matrisi $[A:B]$ olmak üzere

$$[A:B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 & 28 \\ 4 & 9 & -1 & 14 \end{array}\right]$$ şeklindedir. Şimdi bu ilaveli matrise elemanter operasyonlar uygulayalım:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 & 28 \\ 4 & 9 & -1 & 14 \end{array}\right] \underset{\mathcal{E}_2}{\overset{\mathcal{E}_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 31 \\ 0 & 1 & 3 & 18 \end{array}\right]$$

$\mathcal{E}_1 : S_2 \to S_2 + (-3)S_1$

$\mathcal{E}_2 : S_3 \to S_3 + (-4)S_1$

$$\overset{\mathcal{E}_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 18 \\ 0 & 2 & 5 & 31 \end{array}\right]$$

$\mathcal{E}_3 : S_2 \longleftrightarrow S_3$

$$\underset{\mathcal{E}_5}{\overset{\mathcal{E}_4}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -37 \\ 0 & 1 & 3 & 18 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right]$$

$\mathcal{E}_4 : S_1 \to S_1 + (-2)S_2$

$\mathcal{E}_5 : S_3 \to S_3 + (-2)S_2$

$x - 7z = -37 \Rightarrow x = -2$

$y + 3z = 18 \Rightarrow y = 3$

$-z = -5 \Rightarrow z = 5$ bulunur.

4- $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$X \to A(X) = AX$ şeklinde tanımlanan lineer dönüşümde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$ olmak üzere

a) $\alpha = (-1, 2, 1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_1^3$ için

$$A(\alpha) = A\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_1^2$$

$$\beta = (2,1,4) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_1^3 \text{ için}$$

$$A(\beta) = A\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -19 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_1^2 \text{ bulunur.}$$

b) A dönüşümünün rankı; bu dönüşüme karşılık gelen A matrisinin maksimum sayıda lineer bağımsız kolon vektör sayısıdır.

$(1,-2) = c(1,1)$ olacak şekilde $\exists c \in \mathbb{R}$ bulunamadığı için $\{(1,-2),(1,1)\}$ lineer bağımsız olup

$$\text{rank } A = 2 \text{ dir}$$

$$\underbrace{\text{boy } \mathbb{R}^3}_{=3} = \underbrace{\text{rank } A}_{=2} + \boxed{\underbrace{\text{boy çek } A}_{=1 \text{ bulunur}}}$$

5- $S = \{ \underbrace{(1,0,1)}_{\alpha_1}, \underbrace{(2,1,0)}_{\alpha_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{\alpha_3} \}$

$$S(\alpha_1) = S(1,0,1) = (1,2,1)$$
$$= 1(1,1,1) + 1(1,1,0) + (-1)(1,0,0)$$

$$S(\alpha_2) = S(2,1,0) = (1,3,1)$$
$$= 1(1,1,1) + 2(1,1,0) + (-2)(1,0,0)$$

$$S(\alpha_3) = S(0,0,1) = (0,1,1)$$
$$= 1(1,1,1) + 0(1,1,0) + (-1)(1,0,0)$$

$$\Rightarrow A_{S,T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$